Bloque III . Álgebra lineal

1/2

(1) Dada la matriz $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$A = [2\ \ 0\ ;\ 0\ \ 3]$$

encuentre una base para el subespacio U de $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ definido por

$$U = \{X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : X\cdot A = A \cdot X\}$$

¿Cuáles serán las ecuaciones implícitas de U?

(2) Exactamente uno de los vectores $\bar{u} = (9,5,1)$ y $\bar{v}(9,-5,1)$ puede ser escrito como combinación lineal de los vectores columna de la matriz

$$A = [3\ 0\ 3\ ;\ 2\ 1\ 1\ ;\ 1\ 2\ -1] = [\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3]$$

Determina cuál de ellos es y exprésalo como una combinación lineal de los vectores $\{\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3\}$ columna de A.

Extraer una base de $\mathbb{R}^3$ del cjto $\{\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \bar{u}, \bar{v}\}$.

(3) Hallar el polinomio $\bar{p}(x) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ que interpola a $f(x)$ en la tabla $\left\{\begin{matrix} x_0 = 3, & x_1 = 2, & x_2 = -1 \\ f_0 = 10, & f_1 = 3, & f_2 = 6 \end{matrix}\right\}$ cumpliendo

$$\bar{p}(x_i) = f_i \quad i = 0,1,2$$

Expresad, tras demostrar que es una base de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, el polinomio $\bar{p}(x)$ en la base "Newton"

$$B_N = \{1, (x-3), (x-3)(x-2)\}$$

¿Cuál será la expresión de $\bar{p}(x)$ en la base canónica de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$?

(4) Si un vector de $\mathbb{R}^2$ tuviera como coordenadas $(2,-3)$ respecto de la base $\{\bar{u}_1(3,-1)\ ;\ \bar{u}_2(0,3)\}$, encuentre una base de $\mathbb{R}^2$ respecto de la cual tenga por coordenadas $(1,1)$

2/2

(5) Sean B_1 a B_2 dos bases en $\mathbb{R}^2$

Sea $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ la matriz de cambio de base de B_1 a B_2.

(a) Si $\bar{u}\in\mathbb{R}^2$ tiene $[\bar{u}]_{B_1}=\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$, hallar sus coordenadas $[\bar{u}]_{B_2}$

(b) Si $\bar{v}\in\mathbb{R}^2$ tuviera $[\bar{v}]_{B_2}=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, calcular sus coordenadas $[\bar{v}]_{B_1}$.

(6) $\mathbb{R}^3$ Sea $B_u=\{\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$,

Tenemos $\bar{x}\in\mathbb{R}^3$ con coordenadas $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en B_u.

Si $\bar{v}_1=\bar{u}_1+\bar{u}_2$, $\bar{v}_2=\bar{u}_1+\bar{u}_3$, $\bar{v}_3$ desconocido (α,β,γ),

hallar $\bar{v}_3$ para que las coordenadas de $[\bar{x}]_{B_v}$ sean $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ con $B_v=\{\bar{v}_1,\bar{v}_2,\bar{v}_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$

Nota. De estos dos ejercicios hay que realizar uno

Algebra Lineal - Prueba diagnóstico Bloque III
15/05/2024

(a)

$A=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}$ $X=\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}$ ①

$$\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2x&3y\\2z&3t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x&2y\\3z&3t\end{bmatrix}$$

$(1,1)$ ∧ $(2,2)$ no aportan nada

se cumplen cualquiera que sean "x ∧ t"

$(1,2)$ $3y=2y \rightarrow \underline{\underline{y=0}}$

$(2,1)$ $2z=3z \rightarrow \underline{\underline{z=0}}$

Luego $U=\left\{X\in M_{2\times2}(\mathbb{R})\equiv\begin{pmatrix}x&y\\z&t\end{pmatrix} \mid y=0 \wedge z=0\right\}$

$X\in U \rightarrow \begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

$U\equiv\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}}_{\bar{u}_1},\underbrace{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}}_{\bar{u}_2}\right\rangle$ matrices diagonales

c/to generador que al estar formados por 2 "vectores" independientes es base de U

$rg(\bar{u}_1,\bar{u}_2)=2$

Ecuaciones implícitas $\left\{\begin{matrix}y=0 & \leftarrow X(1,2)\\ z=0 & \leftarrow X(2,1)\end{matrix}\right\}$

(2) rango $\{\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \bar{u}, \bar{v}\}$

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \bar{c}_1 & \bar{c}_2 & \bar{c}_3 \end{array} \end{array} \quad \text{rango} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 9 & 9 \\ 2 & 1 & 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

por 'facilidad operativa' al hallar la escalonada equivalente cambio $\bar{R}_1 \leftrightarrow \bar{R}_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 5 & -5 \\ 3 & 0 & 3 & 9 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 & -7 \\ 0 & -6 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$\bar{R}_2 \leftarrow \bar{R}_2 - 2\bar{R}_1$ $\qquad$ $\bar{R}_3 \leftarrow \bar{R}_3 - 2\bar{R}_2$

$\bar{R}_3 \leftarrow \bar{R}_3 - 3\bar{R}_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

$\bar{v}$ es independiente de $\bar{c}_1$ y $\bar{c}_2$

depende de $\bar{c}_1$ y $\bar{c}_2$

$\bar{u} \in \langle \bar{c}_1, \bar{c}_2 \rangle$

Si eligiéramos $\{\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{v}\}$ tendríamos 3 vectores lin. indep., y como $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 \Rightarrow$ base de $\mathbb{R}^3$

(2) cont

$$\bar{u} = \alpha \cdot \bar{c}_1 + \beta \cdot \bar{c}_2$$

$$\text{rango}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

$$3\alpha = 9 \rightarrow \alpha = 3$$

$$2\alpha + \beta = 5 \rightarrow \beta = 5 - 2\alpha = 5 - 6 = -1$$

$$\alpha + 2\beta = 1 \quad (3) + 2\cdot(-1) = 1 \quad ✓$$

luego $\bar{u} = 3\bar{c}_1 - \bar{c}_2$

(3) $\bar{p}(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$ en β_c $\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$

~~T~~ambién $\bar{p}(x) = \beta_0 \cdot 1 + \beta_1 (x-3) + \beta_2 (x-3)(x-2)$

si B_N fuera base de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

Como $\dim(\mathbb{P}_2(\mathbb{R})) = 3$ para que fuera base

bastaría que los 3 'vectores' fueran lin. indep.

$$rg\begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

como su det $\neq 0 \Rightarrow$
3 vects lin. indep. ✓

$1 \quad x-3 \quad x^2-5x+6$

Vamos a hallar $\{\beta_0, \beta_1, \beta_2\}$ componentes de $\bar{p}(x)$

en B_N $\quad x_0 = 3 \quad f_0 = 10$
$\quad x_1 = 2 \quad f_1 = 3$
$\quad x_2 = -1 \quad f_2 = 6$

$p(x) = \beta_0 + \beta_1 (x-3) + \beta_2 (x-3)(x-2)$

$P(3) = \beta_0 = 10$ (3) wnT

4

$P(2) = \beta_0 + \beta_1 \underset{-1}{(2-3)} = 3$

$P(-1) = \beta_0 + \beta_1 \underset{-4}{(-1-3)} + \beta_2 \underset{-4}{(-1-3)} \underset{-3}{(-1-2)} = 6$

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 10 \\ \beta_0 - \beta_1 &= 3 \\ \beta_0 - 4\beta_1 + 12\beta_2 &= 6 \end{aligned} \rightarrow \underline{\beta_1} = \beta_0 - 3 = 10 - 3 = \underline{7}$$

$12\beta_2 = 6 - \beta_0 + 4\beta_1 = 6 - 10 + 4\cdot(7) = 24 \rightarrow \underline{\beta_2 = 2}$

Coords de $\bar{p}(x)$ en B_N $\begin{bmatrix} 10 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\bar{p}(x) = 10 + 7(x-3) + 2(x-3)(x-2)$

Sus coords en $B_C = \{1, x, x^2\}$ serían

Podemos desarrollar los productos

$\bar{p}(x) = 10 + \underline{7x} - 21 + 2(x^2 - 5x + 6) =$

$= 2x^2 - 3x + 1$

$\bar{p}(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}_{B_C}$ ref $\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix}$

(4) $\bar{X}$ en $B_{\bar{u}}$ $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ $\{\bar{u}_1(3,-1);\ \bar{u}_2(0,3)\}$

$\bar{X}$ en $B_{\bar{v}}$ $\begin{pmatrix} \bar{v}_1(\alpha_1,\beta_1) \\ \bar{v}_2(\alpha_2,\beta_2) \end{pmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 5

$$\left[B_{\bar{u}} \text{ en } B_c\right][\bar{x}]_{B_{\bar{u}}} = \left[B_{\bar{v}} \text{ en } B_c\right][\bar{x}]_{B_{\bar{v}}}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \\ \bar{u}_1 \quad \bar{u}_2 \end{array} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} \\ \bar{v}_1 \quad \bar{v}_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1+\alpha_2 \\ \beta_1+\beta_2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to \alpha_1+\alpha_2 = 6 \\ \to \beta_1+\beta_2 = -11 \end{array}$$

sist. comp. indeterminado
2 ligaduras $\wedge$ 4 incógnitas
$\Downarrow$
2 grados de libertad (α_2, β_2)

luego $\alpha_1 = 6-\alpha_2$
$\alpha_2 = \lambda$
$\beta_1 = -11 - \beta_2$
$\beta_2 = \mu$

particularizamos
$\lambda = 1$ $\mu = 1$ (por ejemplo
$\alpha_1 = 5$ $\alpha_2 = 1$
$\beta_1 = -12$ $\beta_2 = 1$

$\{\bar{v}_1(5,-12),\ \bar{v}_2(1,1)\}$ comprobación

pasamos ambos a B_c $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -11 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -11 \end{bmatrix}$ ✓

(6)

(5)

(a) $[\bar{u}]_{B_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ ¿$(\bar{u})_{B_2}$?

$P_{B_1 \mapsto B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ conociendo en B_1 (dato) obtenemos en B_2 (incógnita)

$P_{B_1 \mapsto B_2} [\bar{u}]_{B_1} = [\bar{u}]_{B_2}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 \\ -12 \end{bmatrix}}}$ coordenadas de $\bar{u}$ en B_2

(b) $[\bar{v}]_{B_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ ¿$[\bar{v}]_{B_1}$?

$P_{B_1 \mapsto B_2} [\bar{v}]_{B_1} = (\bar{v})_{B_2}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ 2 ecns con 2 incógnitas

podemos hacer $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

G-J.

$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \end{array}\right]$

$\bar{R}_1 = \bar{R}_1 - \bar{R}_2$ inv.

comprob. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

luego $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 5/3 \\ -5/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}$

16) $[\bar{x}]_{B_{\bar{u}}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 7

$B_{\bar{v}} = \{ \bar{v}_1 = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 \,;\, \bar{v}_2 = \bar{u}_1 + \bar{u}_3 \,;\, \bar{v}_3 = \alpha \bar{u}_1 + \beta \bar{u}_2 + \gamma \bar{u}_3 \}$

$\underbrace{[B_{\bar{u}} \text{ en } B_{\bar{u}}]}_{I_3} [\bar{x}]_{B_{\bar{u}}} = [B_{\bar{v}} \text{ en } B_{\bar{u}}] [\bar{x}]_{B_{\bar{v}}}$ dato $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{bmatrix}}_{(*)} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

* $[B_{\bar{v}} \text{ en } B_{\bar{u}}]$ columnas vectores $\bar{v}_i$ en función de los $\bar{u}_i$

$1 = 1 - 1 - \alpha \rightarrow \alpha = -1$

$-1 = 1 \quad - \beta \rightarrow \beta = 2$

$0 = \quad -1 - \gamma \leftarrow \gamma = -1$

luego $\bar{v}_3 = -\bar{u}_1 + 2\bar{u}_2 - \bar{u}_3$