(1) $[V = \mathbb{R}^4 ; +, \cdot_{\mathbb{R}}]$

Prueba Bloque 3 - Asignatura Algebra
curso 2021/2022

¿ Forma $S \subseteq V = \{\bar{u}_1 (1,-1,1,0) ; \bar{u}_2 (2,-1,0,1) ; \bar{u}_3 (1,0,-2,1) ; \bar{u}_4 (0,0,0,1)\}$ una base de V ?

$\boxed{1/2}$

En caso afirmativo expresar $\bar{u}(3,1,-8,3)$ en dicha base.

Hallar las matrices de cambio de base de base canónica a base 'S' y de base 'S' a canónica.

(2) ¿Generan el subconjunto $T \subseteq \mathbb{P}_2[\mathbb{R}] = \{\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3\}$, siendo $\{\bar{t}_1(x) = x^2+1, \bar{t}_2(x) = x-1 ; \bar{t}_3(x) = 2x+2\}$ el espacio vectorial $\mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$?

$\mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$ conjunto de polinomios de grado ≤ 2 con coeficientes reales

¿Forman T una base de dicho espacio vectorial?

¿Cuál sería la matriz de cambio de base de T a la base canónica de $\mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$?

Proporcionar $[\bar{u}(x) = 1 - x + 2x^2] \rightarrow$ [coordenadas de $\bar{u}(x)$ en T]

(3) Dada una matriz (4x4)

M = [1 0 1 0; -7 4 -1 -6; 5 0 1 4; 0 -3 0 8]

se obtiene

>> R = rref(M) ↵

R = I_4

¿Constituyen las columnas de M una base de $\mathbb{R}^4$?

¿Cuál sería la solución del sistema de ecuaciones lineales: $M \cdot \bar{x} = \bar{0}$? $\boxed{\text{Justificar las respuestas.}}$

¿Cuál es el rango de la matriz M?

¿Sus filas constituyen un sistema libre o ligado?

(4) Sea $S = \langle (1,-4,2); (0,2,-1); (2,-10,5) \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$.

$\boxed{2/2}$

¿Constituye el sistema generador de S una base de dicho subconjunto de $\mathbb{R}^3$?

Encontrar una base del subespacio vectorial S, así como las ecuaciones implícitas del mismo.

Ampliar, en caso de ser necesario, la base de S para obtener una base de $\mathbb{R}^3$.

(5) Problema de interpolación:

De una función $f(x)$ se conocen los datos siguientes:

	x_0	x_1	x_2	x_3
x_i	-2	0	2	3
$f(x_i)$	-4	0	4	21

se aproxima $f(x)$ por un polinomio $\bar{p}(x)$ que cumple: $\bar{p}(x_i) = f(x_i)$ $\{$ejemplo $p(-2) = -4;\ p(0) = 0 \ldots\}$

$i = 0,1,2,3$

Como son 4 condiciones $\bar{p}(x) \in \mathbb{P}_3[\mathbb{R}]$

Obtener $\bar{p}(x)$ expresado en la base Newton de $\mathbb{P}_3[\mathbb{R}]$

$$B_{NW} = \{ \overbrace{1}^{\bar{p}_1}, \overbrace{x+2}^{\bar{p}_2}, \overbrace{(x+2)\cdot x}^{\bar{p}_3}, \overbrace{(x+2)\cdot x \cdot (x-2)}^{\bar{p}_4} \} \ (*)$$

demostrando previamente que B_{NW} es base de $\mathbb{P}_3[\mathbb{R}]$.

Expresar $\bar{p}(x)$ en base canónica del espacio vectorial.

(*) Los vectores $\{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3, \bar{p}_4\}$ de B_{NW} están expresados en forma factorizada.

<u>Nota</u>. El ejercicio básico y obligatorio está formado por los cuatro primeros ejercicios.

El último propuesto tiene un objetivo de 'excelencia'.

esto es lo importante

[1] Como $\dim(V=\mathbb{R}^4)=4$ basta con que los 4 vectores de $S\subseteq V$ sean linealmente independientes

¿Tiene "$\lambda_1\bar{u}_1+\lambda_2\bar{u}_2+\lambda_3\bar{u}_3+\lambda_4\bar{u}_4=\bar{0}$" soluciones en $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$ no triviales?

Si las tuviera S sería un sistema ligado, y si sólo tuviera la trivial será un sistema libre

$$\text{rango}(MC)=\begin{array}{c}\begin{matrix}(\lambda_1) & (\lambda_2) & (\lambda_3) & (\lambda_4)\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\end{array}=rg\underbrace{[\bar{u}_1|\bar{u}_2|\bar{u}_3|\bar{u}_4]}_{A}$$

Escalonamos la matriz anterior para hallar cuántos pivotes tiene o, alternativamente, vemos si posee inversa. (Luego podemos necesitarla).

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Aplicamos Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}\boxed{1} & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\begin{matrix}\bar{R}_2\leftarrow\bar{R}_2+\bar{R}_1\\ \bar{R}_3\leftarrow\bar{R}_3-\bar{R}_1\\ \sim\end{matrix}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\begin{matrix}\bar{R}_1\leftarrow\bar{R}_1-2\bar{R}_2\\ \bar{R}_3\leftarrow\bar{R}_3+2\bar{R}_2\\ \bar{R}_4\leftarrow\bar{R}_4-\bar{R}_2\end{matrix}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right]\quad\bar{R}_3\leftarrow-\bar{R}_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \bar{R}_1 \leftarrow \bar{R}_1 + \bar{R}_3 \\ \bar{R}_2 \leftarrow \bar{R}_2 - \bar{R}_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{A^{-1}}$$

$\exists A^{-1} \Rightarrow \det(A) \neq 0$

$\Rightarrow$ rango$(A) = 4$

4 líneas linealm. independientes

$\Rightarrow S = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4\}$ base de $\mathbb{R}^4$

• Expresar $\bar{u}(3,1,-8,3)$ en la base S

$$\bar{u} = \alpha \bar{u}_1 + \beta \bar{u}_2 + \gamma \bar{u}_3 + \delta \bar{u}_4$$

$$\underbrace{[\bar{u}_1 | \bar{u}_2 | \bar{u}_3 | \bar{u}_4]}_{A} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -8 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$ coordenadas de $\bar{u}$ en la base S

M $B_c \mapsto$ base S $\quad P_{B_c S} = A^{-1}$ al ser ambas inversas

M $S \mapsto B_c$ $\quad P_{S B_c} = A$

$$P_{B_c S} \cdot P_{S B_c} = I_4$$ Comprobación

② $T \subseteq \mathbb{P}_2[\mathbb{R}] = \{x^2+1,\ x-1,\ 2x+2\}$ $\quad$ 3/7

¿Genera $\mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$? equivale a

dado Elemento "cualquiera de $\mathbb{P}_2$" $\bar{p}(x) = ax^2+bx+c$

$\Rightarrow \exists\, \lambda, \mu, \gamma \mid \lambda(x^2+1)+\mu(x-1)+\gamma(2x+2) = \bar{p}(x)$

interpretamos los polinomios como elementos de $\mathbb{R}^3$

$$\underset{\text{refer.}}{\begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{equivale}$$

¿Tiene el sistema de ecuaciones lineales en (λ, μ, γ) solución?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Estudiamos rango de la MC (escalonamos)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \underset{\bar{R}_3 \leftarrow \bar{R}_3 - \bar{R}_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \underset{\bar{R}_3 \leftarrow \bar{R}_3 + \bar{R}_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad rg(MC) = 3$$

luego la matriz ampliada también tendrá rango 3 independ. de $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow$ Sistema compatible determinado

$\Rightarrow T$ genera $\mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$ y como tiene 3 vectores (Lin ind.) y la dimensión de $\mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$ es tres $\Rightarrow T$ base de $\mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$

¡ importante

Matriz de cambio de base de T a la base canónica de $\mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$

P_{TB_c} expresa por columnas los vectores de T en la B canónica

$$P_{TB_c} = \left[\bar{t}_1\ \bar{t}_2\ \bar{t}_3\right] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}}\begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$$

proporcionar $\bar{u}(x) = 1 - x + 2x^2$ en T (está en B_c)

$$[\bar{u}]_T = \underbrace{P_{B_c \to T}}_{= P_{TB_c}^{-1}} \cdot [\bar{u}]_{B_c}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

P_{TB_c}

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \bar{R}_3 \leftarrow \left(\tfrac{1}{4}\right)\bar{R}_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{array}\right]$$

$\bar{R}_2 \leftarrow \bar{R}_2 - 2\bar{R}_3$

P_{B_cT}

, luego

$$[\bar{u}_T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$2 \cdot \bar{T}_1 - \frac{1}{2}\bar{T}_3 = \bar{u}$

③
$$M=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ -7 & 4 & -1 & -6\\ 5 & 0 & 1 & 4\\ 0 & -3 & 0 & 8\end{bmatrix}; \quad R = \text{rref}(M) = I_4 \qquad \frac{5}{7}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$ 4 pivotes no nulos (pero no 1)

$\Rightarrow$ rango$(M) = 4 \Rightarrow \det(M) \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ las cuatro líneas (filas o columnas) de M son linealmente independientes
(sistema libre)

- ¿Constituyen las 4 columnas de M una base de $\mathbb{R}^4$?

Sí puesto que dimensión de $\mathbb{R}^4 = 4$ y las 4 columnas son vectores de $\mathbb{R}^4$ lin. indep.

- Solución del SLH $M\bar{x} = \bar{0}$ ← importante

rango$(M) = 4$ 4 incógnitas $\Rightarrow$ sistema compatible determinado $\Rightarrow$ solución única la trivial $\bar{X} = \bar{0}$

- Rango matriz $M = 4 \rightarrow$ sus cuatro filas son linealmente independientes luego son un sistema libre.

- Solución $M\bar{x} = \bar{b}$ única

$rg(M) = rg(M|\bar{b}) = 4$ compatible determinado

(4) $S = \langle (1,-4,2), (0,2,-1), (2,-10,5) \rangle$ (6)

sist. generador de S, vamos a extraer una base del mismo viendo cuáles son lin. independientes, si fueran los tres serían a su vez base de $\mathbb{R}^3$ al ser su dimensión 3 de $\mathbb{R}^3$

Escalonamos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & -10 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ rango } 2$$

los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ son lin. indep. (asociados a los pivotes no nulos)

$\Rightarrow$ base de $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Cualquier vector de S se genera de forma única mediante dicha base, luego

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\in S} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow rg \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ -4 & 2 & y \\ 2 & -1 & z \end{array}\right] = 2$$

$$\Rightarrow \det \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ -4 & 2 & y \\ 2 & -1 & z \end{array}\right) = 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & y \\ -1 & z \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(2z + y) + x(0) = 0$$

ecuación implícita de S ← comprobar con los vectores de la base

$$S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + 2z = 0 \}$$

Ampliar base de S para obtener base de $\mathbb{R}^3$ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{e}_3} \right\}$ cuyo rango es 3.

(5) (7)

x_i	$f(x_i)$
-2	-4
0	0
2	4
3	21

4 datos $\Rightarrow$ 4 condiciones

$f(x) \approx p(x) \in \mathbb{P}_3[\mathbb{R}]$

4 incógnitas (sus coeficientes)

$\bar{p}(x)$ en B_{NW}

$$\bar{p}(x) = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot (x+2) + \gamma (x+2)\cdot x + \delta \underbrace{(x+2)x(x-2)}_{(x^2-4)\cdot x}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} \bar{p}(x) \text{ en } B_{NW}$$

$p(-2) = f(-2) = -4$

$\boxed{-4 = \alpha}$

$p(0) = f(0) = 0$

$0 = \alpha + \beta(0+2) = \alpha + 2\beta \to 0 = -4 + 2\beta$

$\boxed{\beta = 2}$

$p(2) = f(2) = 4$

$4 = \alpha + \beta(2+2) + \gamma(2+2)\cdot 2 =$

$= \alpha + 4\beta + 8\gamma$

$4 = (-4) + 8 + 8\gamma \to \boxed{\gamma = 0}$

$p(3) = f(3) = 21$

$21 = \alpha + \beta(3+2) + \gamma(3+2)\cdot 3 + \delta(9-4)\cdot 3 =$

$= \underset{-4}{\alpha} + \underset{\substack{2 \\ 10}}{5\beta} + \underset{0}{15\gamma} + 15\delta = \underbrace{-4+10}_{6} + 15\delta$

$\Rightarrow \underline{\delta = 1}$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{B_{NW}}$$

$\bar{p}(x) = -4 \cdot 1 + 2(x+2) + (x^2-4)x = -4 + 2x + 4 + x^3 - 4x$

$(x+2)\cdot x$ coef. 0

$= x^3 - 2x$ en B_c