Prueba Álgebra Lineal Bloque 3 1/2

(1) Sea $S \subset \mathbb{R}^3 = \{\vec{u}_1(1\,0\,0), \bar{u}_2(1\,1\,0); \bar{u}_3(1,1,1), \bar{u}_4(2\,0\,-1)\}$

¿Es 'S' un conjunto de generadores de $\mathbb{R}^3$?
Extraer una base de dicho conjunto S, para el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$.
¿Cuáles serán las componentes de $\bar{x}(1,-1,2)$ en dicha base?

(2) Sea el espacio vectorial $V \equiv \mathbb{R}^2$, y sean
$B_u = \{\bar{u}_1(1,1); \bar{u}_2(-1,2)\}$ y $B_v = \{\bar{v}_1(2,-1); \bar{v}_2(1,-1)\}$
dos bases de dicho espacio.
Hallar las componentes de un vector $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ en la base Bv, sabiendo que sus componentes en Bu son $(1,-1)$.
¿Cuál será la matriz de cambio de base de Bu a Bv? $P_{B_u \mapsto B_v}$

(3) En el espacio vectorial de las funciones derivables reales de variable real, se tienen los siguientes subconjuntos $W_1 = \{\operatorname{sen} x, \operatorname{sen}(x + \pi/2), \cos x\}$ y $W_2 = \{e^x, xe^x, x^2e^x\}$, ¿cuál de ellos constituye un sistema libre y cuál un sistema ligado? Explicar lo que se hace

(4) Sea $S \subset \mathbb{R}^3 \equiv \mathcal{L}\{\bar{u}(1\,0\,1);\ \bar{v}(1\,1\,1)\}$

luego $S = \langle \bar{u}(1\,0\,1),\ \bar{v}(1\,1\,1) \rangle$

Hallar las ecuaciones implícitas del subespacio vectorial S.

Ampliar la base de "S" hasta obtener una base de $\mathbb{R}^3$. Sea $B = \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}$ dicha base

Expresar $\bar{x}(-3, 2, -2)$ en dicha base B.

(5) Sea el espacio vectorial real

$[\mathbb{P}_3[\mathbb{R}];\ +,\ \circ_{\mathbb{R}}]$ polinomios de grado ≤ 3 con coeficientes reales

Sea $S \subset \mathbb{P}_3[\mathbb{R}] = \{1, x, x(x-1), x(x-1)^2\}$ un subconjunto de $\mathbb{P}_3[\mathbb{R}]$

¿Es "S" una base de $\mathbb{P}_3[\mathbb{R}]$?

En caso de respuesta afirmativa, expresar $p(x) = 2 - x + x^3$, en dicha base.

<u>Nota</u> El ejercicio debe constar de 4 problemas, los tres primeros son fijos, y entre el (4) y el (5) se debe optar por uno.

(1) $S \subset \mathbb{R}^3 = \{\bar{u}_1(1\,0\,0);\ \bar{u}_2(1\,1\,0);\ \bar{u}_3(1,1,1);\ \bar{u}_4(2,0,-1)\}$

S conjunto generador de $\mathbb{R}^3$ si dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ existen $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\} \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 + \lambda_3 \bar{u}_3 + \lambda_4 \bar{u}_4 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$ sistema compatible $rg\, MC = rg\, MA$

$$MA = \left[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{matrix}}_{MC} \left| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right.\right] ; [MC] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$ rango (MC) = 3

rango (MA) = 3 $\Rightarrow rg(MA) = rg(MC) = 3$ sistema compatible

$\Rightarrow$ S genera $\mathbb{R}^3$ [siempre tiene solución independientemente de (x,y,z)]

Como nº de incógnitas = 4 sistema compatible indeterminado

$\Rightarrow \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$ múltiples soluciones

$\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4\}$ es conjunto generador pero no son vectores linealmente independientes, ya que $\bar{u}_4$ depende de $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$, por tanto no es base de $\mathbb{R}^3$

base de $\mathbb{R}^3$ 3 vects lin. indep. $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$

$B = \{\bar{u}_1(1,0,0);\ \bar{u}_2(1,1,0);\ \bar{u}_3(1,1,1)\}$

* Componentes de $\bar{x}(1,-1,2)$ en la base B

$$[\bar{x}]_{B_c} = M_{B\, en\, B_c} [\bar{x}]_B$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{vects de B en la B canónica}} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}}_{\text{coords de } \bar{x} \text{ en B}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{P_{B_c\, en\, B}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\text{coords de } \bar{x} \text{ en } B_c}$$

¿$M^{-1}_{BB_c}$? Conocemos $M_{B \text{ en } B_c}$ $[M_{BB_c} | I_3]$

procedimiento de Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$\bar{R}_1 = \bar{R}_1 - \bar{R}_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \to M^{-1}_{BB_c}$$

$\bar{R}_2 \leftarrow \bar{R}_2 - \bar{R}_3$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}_B}$$

(2) $V = \mathbb{R}^2$

$B_u = \{ \bar{u}_1 (1,1) ; \bar{u}_2 (-1,2) \}$

$B_v = \{ \bar{v}_1 (2,-1) ; \bar{v}_2 (1,-1) \}$

$[\bar{x}]_{B_u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ¿ $[\bar{x}]_{B_v}$?

$$\boxed{M_{B_uB_c} [\bar{x}]_{B_u} = M_{B_vB_c} [\bar{x}]_{B_v}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad ¿\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}?$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}_{[\bar{x}]_{B_v}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{P_{B_u \mapsto B_v}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{[\bar{x}]_{B_u}}$$

Vamos a hallar $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$, utilizamos Gauss-Jordan (3/8)

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\bar{R}_1 \leftarrow \frac{1}{2}\bar{R}_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\bar{R}_2 \leftarrow \bar{R}_2 + \bar{R}_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\underset{\bar{R}_2 \leftarrow (-2)\cdot\bar{R}_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right] \underset{\bar{R}_1 \leftarrow \bar{R}_1 - \frac{1}{2}\bar{R}_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

luego

$$P_{B_u \to B_v} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}}_{M^{-1}_{B_v B_c}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{M_{B_u B_c}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$$

finalmente

$$[\bar{x}]_{B_v} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{[\bar{x}]_{B_u}} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

(3) Ejemplo de aplicación del determinante funcional

Wronskiano

$$W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$$

¿Son sistemas libres o ligados?

$W[\quad] = 0$ (Sist. ligado); $W[\quad] \neq 0$ sist. libre

$w_1 = \{\operatorname{sen} x, \operatorname{sen}(x + \pi/2), \cos x\}$

<u>nota</u> Debe salir $W[\quad] = 0$, pues

$$\operatorname{sen}(x + \pi/2) = \operatorname{sen} x \underbrace{\cos \pi/2}_{0} + \cos x \underbrace{\operatorname{sen} \pi/2}_{1} = \cos x$$

W_1

$$\underset{\uparrow \text{wronskiano}}{W}\left[\overset{y_1}{\operatorname{sen} x}, \overset{y_2}{\operatorname{sen}(x+\pi/2)}, \overset{y_3}{\cos x}\right] = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \operatorname{sen}(x+\pi/2) & \cos x \\ \cos x & \cos(x+\pi/2) & -\operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & -\operatorname{sen}(x+\pi/2) & -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= -\operatorname{sen} x \cos x \cos(x+\pi/2) - \cos^2 x \operatorname{sen}(x+\pi/2) + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen}(x+\pi/2) -$$

$$- \left[-\operatorname{sen} x \cos x \cos(x+\pi/2) + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen}(x+\pi/2) - \cos^2 x \operatorname{sen}(x+\pi/2)\right] =$$

$$= \underbrace{(-\operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} x \cos x)}_{0} \cos(x+\pi/2) + \underbrace{(-\cos^2 x + \cos^2 x)}_{0} \operatorname{sen}(x+\pi/2) +$$

$$+ \underbrace{(\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x)}_{0} \operatorname{sen}(x+\pi/2) = 0 \cdot \cos(x+\pi/2) + 0 \cdot \operatorname{sen}(x+\pi/2) = \underline{0}$$

luego $\{\operatorname{sen} x, \operatorname{sen}(x+\pi/2), \cos x\}$ linealmente dependientes, sistema ligado

W_2

$$W[e^x, xe^x, x^2e^x] = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2e^x \\ e^x & (1+x)e^x & (x^2+2x)e^x \\ e^x & (2+x)e^x & (x^2+4x+2)e^x \end{vmatrix} =$$

$$= e^x \cdot e^x \cdot e^x \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 1+x & x^2+2x \\ 1 & 2+x & x^2+4x+2 \end{vmatrix} = e^{3x} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 2 & 4x+2 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{3x} \begin{vmatrix} 1 & 2x \\ 2 & 4x+2 \end{vmatrix} = e^{3x}\left[(4x+2) - 4x\right] = 2e^{3x} \neq 0 \quad \forall x$$

$\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$ sistema libre, vectores linealmente independientes

(4) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{u}} + \mu \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{v}} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\{\bar{u}, \bar{v}\}$ sistema generador de S

¿Lin. indep.? $\operatorname{rg}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2$, luego sistema libre

(generadores + lin. indep.) $\Rightarrow$ base de S, dimensión$(S) = 2$

ecuación(es) implícita(s) de $S \subseteq \mathbb{R}^3$

ecuaciones paramétricas
$$x = \lambda + \mu$$
$$y = \mu$$
$$z = \lambda + \mu$$

$\rightarrow x = z \rightarrow x - z = 0$

y cualquiera

$$S \subseteq \mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\}$$

nº ecuaciones implícitas + dimensión de S = dimensión de $\mathbb{R}^3$

1 + 2 = 3

Base de $\mathbb{R}^3$ 3 vectores de $\mathbb{R}^3$ lin. indep.

añadir

$$B = \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\} = \left\{ \bar{u}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \bar{v}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \bar{w}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

¿linealmente indep.?

$$\text{rango}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = \text{rango}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix} = rg\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = 3 \quad \underline{\text{Sí}}$$

$\bar{R}_3 \leftarrow \bar{R}_3 - \bar{R}_1$

$\Rightarrow B$ base de $\mathbb{R}^3$

• Expresar $\bar{x}(-3, 2, -2)$, que está en base canónica, en la base B

$$\underset{\overset{\shortparallel}{I_3}}{M_{B_c B_c}} \cdot [\bar{x}]_{B_c} = M_{B B_c} \cdot [\bar{x}]_B \qquad \begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-3\\2\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix}-3\\2\\-2\end{bmatrix}$$

Calculamos su inversa por medio de Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&1\end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right]$$

$\bar{R}_3 \leftarrow \bar{R}_3 - \bar{R}_1$ $\qquad \bar{R}_1 \leftarrow \bar{R}_1 - \bar{R}_2$

$M^{-1}_{B B_c}$

$P_{B_c \mapsto B}$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{x}]_B \quad P_{B_c \mapsto B} \quad [\bar{x}]_{B_c} \quad [\bar{x}]_B$$

(5) $\mathbb{P}_3[\mathbb{R}]$ dimensión 4

base de $\mathbb{P}_3[\mathbb{R}]$ 4 vectores lin. ind. de dicho conjunto

$S \subseteq \mathbb{P}_3[\mathbb{R}] = \{1, x, x(x-1), x(x-1)^2\} = \{1, x, x^2-x, x^3-2x^2+x\}$ elementos en B_c

¿S sistema libre? referencia $\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$

$$\text{rango} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} 1 & x & x^2-x & x^3-2x^2+x \end{array} \end{array} = 4$$

al ser su det. no nulo

$\Rightarrow S$ base de $\mathbb{P}_3[\mathbb{R}]$

Expresar $\bar{p}(x) = 2 - x + x^3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{B_c}$ en dicha base S

$[\bar{p}]_{B_c} = M_{S\,en\,B_c} [\bar{p}]_S$, hacemos $[\bar{p}]_S = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$$

premult. por $M^{-1}_{S\,en\,B_c}$ en ambos miembros

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{p}]_S = P_{B_c\,en\,S} \quad [\bar{p}]_{B_c}$$

luego debemos calcular la inversa de $M_{S\,en\,B_c}$

Algoritmo de Gauss-Jordan

$$[M_{SB_c} | I_4] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{\bar{R}_2 \leftarrow \bar{R}_2 + \bar{R}_3 \\ (\text{col } 3)}}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{\bar{R}_2 \leftarrow \bar{R}_2 + \bar{R}_4 \,;\, \bar{R}_3 \leftarrow \bar{R}_3 + 2\bar{R}_4 \\ (\text{col } 4)}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad I_4 \qquad\qquad M^{-1}_{SB_c}$$

podemos comprobar el resultado haciendo $M_{SB_c} \cdot M^{-1}_{SB_c}$, y viendo si obtenemos I_4

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando $[\bar{p}]_S = P_{B_c \mapsto S} [\bar{p}]_{B_c}$ tendremos

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = [\bar{p}]_S$$

Comprobación $S = \{1, x, x(x-1), x(x-1)^2\}$ y las componentes de $[\bar{p}]_S = [2 \ 0 \ 2 \ 1]_S \Rightarrow$

$$\bar{p}(x) = 2\cdot(1) + 0\cdot(x) + 2\cdot(x(x-1)) + 1\cdot(x(x-1)^2) =$$

$$= 2 + 2(x^2 - x) + (x^3 - 2x^2 + x) = 2 + 2x^2 - 2x + x^3 - 2x^2 + x =$$

$$= x^3 + (2x^2 - 2x^2) + (-2x + x) + 2 = x^3 - x + 2$$

$$[\bar{p}]_{B_c} = [2 \ -1 \ 0 \ 1]$$

$(1 \quad x \quad x^2 \quad x^3)$ referencia

Ejercicio complementario (interpolación de Hermite)

$f(x) \sim$

x	$f(x)$	$f'(x)$
$x_0 = 1$	$f(1) = 3$	$f'(1) = 6$
$x_1 = 0$	$f(0) = 0$	$f'(0) = 1$

4 datos
4 ecuaciones

$p(x) \approx f(x)$ cumpliendo
$$\left.\begin{array}{l} p(1) = f(1) = 3 \\ p'(1) = f'(1) = 6 \\ p(0) = f(0) = 0 \\ p'(0) = f'(0) = 1 \end{array}\right\}$$

podemos determinar 4 incógnitas (coeficientes de $p(x)$) $\Rightarrow$
$p(x) \in \mathbb{P}_3[\mathbb{R}]$

$$B_H = \{1, (x-1), (x-1)^2, x(x-1)^2\}$$

$$\bar{p}(x) = \underline{\alpha_1} \cdot 1 + \underline{\alpha_2}(x-1) + \underline{\alpha_3}(x-1)^2 + \underline{\alpha_4}(x(x-1)^2)$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \equiv [\bar{p}]_{B_H}$$

$p(1) = f(1) = 3$; $\quad 3 = \alpha_1$

$p(0) = f(0) = 0$; $\quad 0 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$

$$p'(x) = \alpha_2 + 2\alpha_3(x-1) + \alpha_4\left[(x-1)^2 + 2x(x-1)\right]$$

$p'(1) = f'(1) = 6$; $\quad 6 = \alpha_2$

$p'(0) = f'(0) = 1$; $\quad 1 = \alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_4$

luego debo resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{l} 3 = \alpha_1 \\ 6 = \alpha_2 \\ 0 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \to 0 = 3 - 6 + \alpha_3 \to \alpha_3 = 3 \\ 1 = \alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_4 \to 1 = 6 - 2\cdot 3 + \alpha_4 \to \alpha_4 = 1 \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = [\bar{p}]_{B_H}$$

$$\bar{p}(x) = 3 \cdot 1 + 6(x-1) + 3(x-1)^2 + x(x-1)^2$$

$$B_H = \{1, x-1, x^2-2x+1, x^3-2x^2+x\}$$

$$M_{B_H \text{ en } B_c} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix}}_{[\bar{p}]_{B_c}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_{B_H \to B_c}} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}}_{[\bar{p}]_{B_H}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{[\bar{p}]_{B_c}}$$