Bloque 3

Realizar uno de los dos ejercicios planteados

1/2

(1) $V \equiv \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ Espacio vectorial polinomios de grado ≤ 3 con coeficientes reales

Demostrar que

$$B = \{1;\ t+1;\ (t+1)^2;\ (t+1)^3\}$$

es una base de dicho espacio vectorial

Encontrar las componentes del polinomio $p(t) = 2t - t^3$ en dicha base B

(2) $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ matrices cuadradas de dimensión 2 con ~~coef~~ (entradas) reales.

Sea $S \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; \begin{matrix} (x - y + z = 0) \\ \wedge \\ (t = 0) \end{matrix} \right\}$

Hallar una base del sev S

Ampliar dicha base hasta obtener una base para el espacio vectorial V.

Expresar la matriz $\overline{m} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ en dicha base.

Adicional

(3) Un número complejo $\bar{z} = 3+2i$, ¿qué coordenadas tendría si la base de $\mathbb{C}$ fuera

$$B = \{ \bar{z}_1 = 1-i \, , \, \bar{z}_2 = 2+3i \} ?$$

Sol

$$[B_c \text{ en } B_c][\bar{z} \text{ en } B_c] = [B \text{ en } B_c][\bar{z} \text{ en } B]$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3 = x + 2y \\ 2 = -x + 3y \end{array} \right\} \rightarrow (x, y) = (1, 1)$$

luego $\bar{z}(1,1)_B$, lo cual quiere decir que

$$\bar{z} = 1 \cdot \bar{z}_1 + 1 \cdot \bar{z}_2$$

No que $\bar{z} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot i = 1 + i$ No

1. $V = \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ espacio vectorial polinómicos de grado ≤ 3 con coef. reales

Demostrar que

$B = \{1, t+1, (t+1)^2; (t+1)^3\}$ es base de dicho espacio.

Encontrar las componentes del polinomio $p(t) = 2t - t^3$ en dicha base B

Base → generador + l.i

generador: $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$

$p(t) = \alpha 1 + \beta(t+1) + \gamma(t+1)^2 + \delta(t+1)^3$

$p(t) = \alpha + \beta t + \beta + \gamma t^2 + 2\gamma t + \gamma + \delta t^3 + 3\delta t^2 + 3\delta t + \delta$

$\Rightarrow a_0 = \alpha + \beta + \gamma + \delta$

$a_1 = \beta + 2\gamma + 3\delta$

$a_2 = \gamma + 3\delta$

$a_3 = \cancel{3}\delta \longrightarrow \delta = a_3$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$r(B) = 4$

$\Rightarrow$ sistema generador, l.i.

(podemos encontrar solución, SCD)

1

l.i $\Rightarrow$ rang(S) = 4 $\Rightarrow$ linealmente independientes

$\Rightarrow$ sí forman base

para obtener las coordenadas $\Rightarrow$ resolvemos

$p(t) = 2t - t^3 \Rightarrow$

$0 = \alpha + \beta + \gamma + \delta$

$2 = \beta + 2\gamma + 3\delta$

$0 = \gamma + 3\delta \rightarrow \underline{\gamma = 3}$

$\underline{-1 = \delta}$

$2 = \beta + 6 - 3 = \beta + 3$

$\underline{\beta = -1}$

$0 = \alpha - 1 + 3 - 1 \rightarrow \underline{\alpha = -1}$

$p(t)$ en base B $\Rightarrow p(t) = (-1, -1, 3, -1)$

$p(t) = -1 - 1(t+1) + 3(t+1)^2 - 1(t+1)^3$

2. $V = M_{2\times2}(\mathbb{R})$ matriz cuadrado 2x2 con entradas reales

Sea. $S \subset M_{2\times2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ \wedge \\ t = 0 \end{array} \right\}$

Hallar una base del sev S.

Ampliar dicha base hasta obtener una base de V. Expresar la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ en dicha base

2

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x & x+z \\ z & 0 \end{pmatrix}, \ x, z \in \mathbb{R} \right\} \quad \dim S = 2$$

$(4-2=2)$

$x - y + z = 0 \rightarrow y = x + z$

$$\begin{pmatrix} x & x+z \\ z & 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

si la ponemos en forma vector

$$\begin{pmatrix} x \\ x+z \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x, z \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ generadores y como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ $r(S) = 2$ $\Rightarrow$ l.i.

$\Rightarrow$ la base será

$$B_1 = < \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} > = \{\bar{s}_1, \bar{s}_2\}$$

$$\bar{m} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 0\bar{s}_1 - 2\bar{s}_2 \Rightarrow \bar{m} = (0, -2)_{B_1}$$

si ~~...~~ vemos $V = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \right\}$ tiene dim 4, por tanto no es base, no podemos generar todo el espacio de V.

necesitamos una matriz $r(S) = 4$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow r(S) = 4$ generador l.i.

$\Rightarrow$ base $B_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow r(S) = 4$ ↵

$$\bar{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$0 = \alpha + \gamma \longrightarrow \gamma = 0$

$-2 = \alpha + \beta \longrightarrow \alpha = 0$

$-2 = \beta$

$0 = \delta$

$\bar{m} = -2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\bar{m} = (0, -2, 0, 0)_{B_2}$

3. Un nº complejo $\bar{z} = 3+2i$ ¿qué coordenadas tendría si la base de $\mathbb{C}$ fuese $B = \{\bar{z}_1 = 1-i,\ \bar{z}_2 = 2+3i\}$?

$$B_K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \bar{z} = a\bar{e}_1 + b\bar{e}_2 \quad (a+bi)$$

$$\bar{z}_{B_K} = (3,2)$$

$$B_C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \qquad M_{B_K}^{B_K} \bar{z}_K = M_{B_C}^{B_K} \bar{z}_{B_C}$$

$$M_{B_K}^{B_K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_{B_C}^{B_K} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{B_C}$$

$$\begin{aligned} 3 &= x + 2y \qquad & 5 = 5y \Rightarrow y = 1 \\ 2 &= -x + 3y \qquad & x = 3 - 2\cdot 1 = 1 \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{B_K} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_C} \Rightarrow \bar{z}_{B_C} = 1\bar{z}_1 + 1\bar{z}_2$$